U ovom poglavlju se proučava šta se dešava kad se u nekom malom delu sredine proizvede na bilo koji način *poremećaj* elektromagnetnog polja. Svaki takav poremećaj se prostire kroz prostor u vidu talasa, i to su tzv. *elektromagnetni talasi*, koje je u svojoj teoriji predvideo Maksvel (1864), a eksperimentalno ih otkrio i proučio njihove osobine Herc (1888). Akcenat će biti na elektromagnetnim talasima u vakuumu i neprovodnim sredinama u kojima nema disperzije. Analizirana su partikularna rešenja talasne jednačine kao što su: sferni talasi, ravni talasi i ravni monohromatski talasi.

PRILOG 1

MAKSVELOVE JEDNAČINE ZA RAVNE MONOHROMATSKE TALASE

Visokofrekventne pojave, kakve se često sreću u optici, karakterišu se periodima istog reda veličine ili znatno manjim od karakterističnih vremena sredine (npr. vreme relaksacije, period sopstvenih oscilacija) kao i talasnim dužinama uporedivim ili znatno manjim od njenih karakterističnih dužina (npr. srednje rastojanje između atoma, srednji slobodni put). Zbog toga, u slučaju brzo promenljivih polja nije više moguć uobičajeni prelaz sa elektrodinamike vakuuma na elektrodinamiku materijalnih sredina usrednjavanjem Maksvelovih jednačina za pravo elektromagnetno polje. Ovde se više ne mogu dobro definisati pojmovi fizički beskonačno malog elementa zapremine, kao i fizički beskonačno malog intervala vremena, te više nije moguće ni usrednjavanje po beskonačno malom elementu zapremine oko uočene tačke i po beskonačno malom intervalu vremena oko uočenog trenutka. Takođe, u visokofrekventnim poljima sva naelektrisanja ponašaju se uglavnom na isti način, zato ni podela naelektrisanja na slobodna i vezana više nije moguća. Zbog toga, kao polazna tačka moraju se uzeti Maksvelove jednačine za mikrofizička elektromagnetna polja, dobijene usrednjavanjem samo po ansamblu identičnih sistema, pri čemu se sva naelektrisanja dele na *spoljašnja* i *unutrašnja*.

Ako ipak pretpostavimo da se u prvoj aproksimaciji može govoriti o usrednjavanju po beskonačno malom elementu zapremine i po fizički beskonačno malom intervalu vremena, možemo koristiti i uobičajeni oblik Maksvelovih jednačina za materijalne sredine:

$$div\,\mathbf{D} = \rho\,, \tag{1.1}$$

$$div\,\mathbf{B} = 0\,, \tag{1.2}$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{1.3}$$

$$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,, \tag{1.4}$$

gde se sa ρ i $\mathbf{j}$ označavaju srednje vrednosti prostorne i strujne gustine ukupnih slobodnih naelektrisanja: $\rho = \rho_0 + \rho_s$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_s$. Vektori električne indukcije i jačine električnog polja su označeni kao: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ i $\mathbf{H} = 1/\mu_0 \mathbf{B} - \mathbf{M}$. Smisao veličina $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ sledi iz odgovarajućih materijalnih jednačina, koje u slučaju brzopromenljivih polja imaju nešto složeniji oblik. Veličine $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ su jačine električne i magnetne polarizacije.

Pokažimo sad kakva oblik imaju Maksvelove jednačine za brzo promenljiva polja u vidu ravnih monohromatskih talasa. Zbog navedenog se, kao najpogodniji, u slučaju brzopromenljivih polja za rešavanje potpunog sistema jednačina elektrodinamike najčešće koristi „metod Furierovih transformacija" (*Joseph Fourier*). Primenom ovog metoda, za ravne monohromatske talase možemo jednačine polja (kao i ostale veličine) predstaviti u vidu harmonijskih funkcija položaja i vremena:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\ , \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0(\mathbf{k},\omega)e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\ , \tag{1.6}$$

odnosno, u uopštenom obliku kao:

$$\psi=\psi_0 e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}=\psi_0 e^{-i\left(\omega t-k_1x-k_2y-k_3z\right)} \tag{1.7}$$

Primena Hamiltonovog (*Wiliam Hamilton*) operatora ∇ na navedene funkcije daje:

$$\begin{aligned}\nabla\psi&=\left(\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi=\mathbf{e}_1\left(ik_1\psi\right)+\mathbf{e}_2\left(ik_2\psi\right)+\mathbf{e}_3\left(ik_3\psi\right)\\&=i\left(k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+k_3\mathbf{e}_3\right)\psi=i\mathbf{k}\psi\end{aligned}$$

dakle proizvod iste funkcije i faktora $i\mathbf{k}$. Odavde se vidi da je $\nabla=i\mathbf{k}=ik\mathbf{n}_0$, gde je $\mathbf{n}_0=\mathbf{k}/k$ ($\mathbf{k}=k\mathbf{n}_0$ je odgovarajući talasni vektor), tj. Hamiltonov operator pri primeni na veličine koje karakterišu ravne monohromatske talase i imaju oblik (17) svodi se na multiplikacioni operator $i\mathbf{k}$, gde je $\mathbf{k}=k\mathbf{n}_0$ odgovarajući talasni vektor. Na osnovu ovog zaključujemo da se rotor i divergencija ma koje vektorske funkcije tipa $\mathbf{A}(x,y,z)$ (talasne funkcije) mogu prikazati kao

$$div\,\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}\ ,\qquad rot\,\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}$$

čime su oni izraženi u funkciji pravca prostiranja faze ovih talasa. Ukoliko bismo uzeli funkcije (17) sa znakom + ispred zagrade u eksponentu, Hamiltonov operator imao bi oblik $\nabla=-i\mathbf{k}$.

Ako se pođe od uobičajenih Maksvelovih jednačina (1.1 - 1.4), koje važe za materijalne sredine, bez obzira da li su to sredine sa ili bez disperzije, i napišu se za ravne monohromatske talase frekvencie ω i talasnog vektora $\mathbf{k}$, a divergencije i rotori svih veličina se zamene odgovarajućim izrazima koje smo gore diskutovali, a imajući u vidu da diferenciranje po vremenu ma koje od ovih veličina daje proizvod iste funkcije sa $-i\omega$, dobija se:

$$div\,\mathbf{D} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = \rho\,, \tag{1.8}$$

$$div\,\mathbf{B} = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0\,, \tag{1.9}$$

$$rot\,\mathbf{E} = i\mathbf{k}\times\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}\,, \tag{1.10}$$

$$rot\,\mathbf{H} = i\mathbf{k}\times\mathbf{H} = \mathbf{j} - i\omega\mathbf{D}\,. \tag{1.11}$$

Ako se iz ovih jednačina eliminišu veličine $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ pomoću odgovarajućih materijalnih jednačina: $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ i $\mathbf{B} = \hat{\mu}\mathbf{H}$ i ρ pomoću zakona održanja slobodnih naelektrisanja: $\partial\rho/\partial t + div\,\mathbf{j} = 0$, u kojima se prilagode veličine ρ i $\mathbf{j}$ za brzopromenljiva polja u obliku ravnih monohromatskih talasa (u obliku zapisa 17), jednačine (1.8-1.11) možemo formulisati i na drugi način; najpre napišimo jednačinu kontinuiteta slobodnog naelektrisanja u obliku

$$-i\omega\rho + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0$$

a otuda je

$$\rho(r,t) = \frac{1}{\omega}\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = \frac{1}{\omega}\mathbf{k}\cdot\hat{\sigma}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}\,.$$

Tada se prva Maskvelova jednačina može napisati u obliku

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{k}\cdot\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E} = \frac{1}{i}\rho = -\frac{i}{\omega}\mathbf{k}\cdot\hat{\sigma}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E}$$

Poslednja jednačina (1.11), stavljajući pri tome $\mathbf{H} = \hat{\mu}^{-1}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{B}$ dobija oblik

$$\begin{aligned} i\mathbf{k}\times\hat{\mu}^{-1}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{B} &= \hat{\sigma}(\mathbf{k},\omega)\cdot\mathbf{E} - \mathrm{i}\,\omega\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)\mathbf{E} = \\ &= -i\omega\left[\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega) + i\frac{\hat{\sigma}(\mathbf{k},\omega)}{\omega}\right]\mathbf{E} \end{aligned}$$

čime se dobijaju Maksvelove jednačine za ravne monohromatske talase u sledećem obliku:

$$\mathbf{k}\cdot\left[\hat{\varepsilon}\left(\mathbf{k},\omega\right) + i\frac{\hat{\sigma}\left(\mathbf{k},\omega\right)}{\omega}\right]\cdot\mathbf{E} = 0\,, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0\,, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}\,, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{k}\times\hat{\mu}^{-1}\left(\mathbf{k},\omega\right)\mathbf{B} = -\omega\left[\hat{\varepsilon}\left(\mathbf{k},\omega\right) + i\frac{\hat{\sigma}\left(\mathbf{k},\omega\right)}{\omega}\right]\cdot\mathbf{E}\ . \tag{1.15}$$

Veličine $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{\mu}$ predstavljaju tenzore električne i magnetne permeabilnosti, dok veličina $\hat{\sigma}$ označava tenzor specifične provodljivosti. Ove veličine su opštem slučaju kompleksne.

Uzimajući u obzir da veličine **E** i **B** predstavljaju jačinu električnog polja i magnetnu indukciju u obliku ravnih monohromatskih talasa oblika (17), uvrštavanjem ovih izraza i skraćivanjem eksponencijalnih funkcija neposredno vidimo da ove jednačine (1.12-1.15) istovremeno predstavljaju i relacije između odgovarajućih amplituda $\mathbf{E}_0(\mathbf{k},\omega)$ i $\mathbf{B}_0(\mathbf{k},\omega)$ ovih veličina **E** i **B**. Pri tome, za razliku od Maksvelovih diferencijalnih jednačina, jednačine (1.12-1.15) po amplitudama odgovarajućih veličina čine sistem algebarskih jednačina za određivanje jačina polja odnosno amplituda ovih talasa. Prva i četvrta od gornjih jednačina nam sugerišu da uvedemo jedna novi tenzor

$$\hat{\varepsilon}^{eff}(\mathbf{k},\omega) = \hat{\varepsilon}\left(\mathbf{k},\omega\right) + i\frac{\hat{\sigma}\left(\mathbf{k},\omega\right)}{\omega},$$

čije su komponente $\hat{\varepsilon}^{eff}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{k},\omega\right) + i\dfrac{\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}\left(\mathbf{k},\omega\right)}{\omega}$.

Ovako definisani tenzor možemo zvati *tenzor efektivne dielektrične permeabilnosti*, jer on kod monohromatskih talasa u provodnicima formalno igra ulogu veličine analogne dielektričnoj permeabilnosti sredine, ili kraće *električni tenzor sredine*, jeron udružuje veličine $\hat{\varepsilon}(\mathbf{k},\omega)$ i $\hat{\sigma}(\mathbf{k},\omega)$ koje predstavljaju dielektrične i provodne karakteristike sredine.

1. Talasna jednačina

Bilo kakav poremećaj elektromagnetnog polja u nekoj sredini prostire se kroz nju u vidu elektromagnetnih talasa. Da bi se izvele jednačine prostiranja ovih talasa, polazi se od potpunog sistema jednačina elektrodinamike, koji čine Maksvelove jednačine, koje u slučaju sredine koja je *homogena, izotropna i bez disperzije* (vakuumu slične sredine) i za elektromagnetno polje koje je slabo i lokalnog dejstva imaju oblik

$$\begin{aligned} div\mathbf{D} &= \rho, \qquad div\mathbf{B} = 0, \\ rot\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1}$$

gde su ρ i $\mathbf{j}$ srednje vrednosti prostorne i strujne gustine ukupnih slobodnih naelektrisanja, $\rho = \rho_0 + \rho_s, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_s$. Ovo je uobičajeni oblik Maksvelovih jednačina za materijalne sredine i predstavlja osnovne jednačine elektrodinamike. Ovako uvedena veličina $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ naziva se vektor električne indukcije, a veličinu $\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$ zvaćemo vektor jačine magnetnog polja. Veličine $\mathbf{P}$ i $\mathbf{M}$ karakterišu električnu i magnetnu polarizaciju sredine. Maksvelove jednačine (1) su, slično kao i u slučaju vakuuma, diferencijalne jednačine elektromagnetnog polja u posmatranoj materijalnoj sredini. Međutim, u ovom slučaju Maksvelove jednačine nisu dovoljne da potpuno odrede jačine električnog i magnetnog polja, jer ovde moramo znati još i izvesne dopunske uslove, koji karakterišu električnu i magnetnu polarizaciju kao i provodljivost sredine. Njihov oblik zavisi od prirode i stanja sredine kao i od samog elektromagnetnog polja i predstavljaju bitne karakteristike sredine. U cilju formulisanja ovih jednačina, uvede se sledeće pretpostavke: 1) sredina izotropna i bez disperzije, tj. karakteristike sredine su iste u svim pravcima i nezavisne od frekvencije i talasnog vektora elektromagnetog polja, 2) elektromagnetno polje slabo i nije brzo pormenljivo, i 3) dejstvo polja lokalno u prostoru i vremenu. Tada odgovarajuće materijalne jednačine sredine (za linearnu neprovodnu sredinu bez disperzije) imaju oblik:

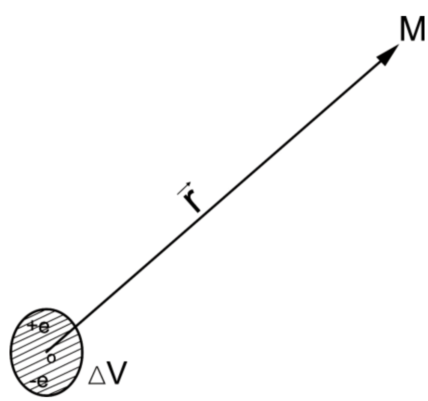
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mathbf{j}_s = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{str}\right) \tag{2}$$

gde su veličine ε i μ, dielektrična i magnetna propustljivost, konstante.

Elektromagnetno polje se može odrediti i pomoću elektromagnetnih potencijala (skalarni i vektorski), koji u navedenim uslovima zadovoljavaju diferencijalne jednačine:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E} = -grad\,\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = rot\,\mathbf{A} \\ &\Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho, \quad \Delta\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{j}\end{aligned} \tag{3}$$

Neka se u vrlo maloj oblasti ΔV izazove izvestan poremećaj elektromagnetnog polja i neka se pretpostavi da u preostalom delu polja nema spoljašnjih naelektrisanja, ni stranog električnog polja, kao i da je srednja prostorna gustina slobodnih naelekrisanja jednaka nuli. Ove pretpostavke ne moraju da znače da je i srednja strujna gustina jednaka nuli, na primer u metalnim provodnicima u kojima ima jednak broj pozitivnih i negativnih naelektrisanja, ali se kreću samo negativna, tada će biti $\rho = \overline{\rho_s^{mik}} = 0$ i $\mathbf{j} = \overline{\mathbf{j}_s^{mik}} \neq 0$. Takođe, u samoj oblasti poremećaja može biti i $\rho \neq 0$, zbog samog poremećaja elektromagnetnog polja, usled kretanja slobodnih naelektrisanja (indeks *mik* označava da se radi o mikrofizičkoj veličini). Primer ovoga su polovi induktora naizmenične struje sa slike 1, gde se periodično menjaju algebarske vrednosti slobodnih naelektrisanja.



Slika 1: Polovi induktora naizmenične struje

Da bi se pod navedenim uslovima ispitalo ponašanje električnog i magnetnog polja van oblasti gde je izazvan poremećaj, treba zameniti $\mathbf{E}^{str} = 0$ i $\rho = 0$ u materijalnim jednačinama, čime se dobija $\mathbf{j} = \mathbf{j}_s = \sigma \mathbf{E}$, tako da sistem Maksvelovih jednačina, posle eliminacije veličina $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ postaje:

$$\begin{aligned} &div\,\mathbf{E} = 0, \qquad div\,\mathbf{B} = 0 \\ &rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\,\mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4}$$

Da bi se eliminisalo $\mathbf{B}$ treba obrazovati rotore leve i desne strane jednačine za rotor električnog polja u sistemu jednačina (4), nakon čega se dobija[1] $grad\,div\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\partial(rot\mathbf{B})/\partial t$. Koristeći ostale jednačine iz sistema (4) dobijamo:

$$\Delta\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

Isti postupak se može ponoviti sa jednačinom rotor magnetne indukcije iz sistema jednačina (4) i eliminisati $\mathbf{E}$, što daje:

$$\Delta\mathbf{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,. \tag{6}$$

Odavde se vidi da električno i magnetno polje u celoj oblasti van poremećaja, gde je $\rho = 0$, zadovoljavaju diferencijalne jednačine istog oblika i ponašaju se na isti način u prostoru i vremenu. Ove jednačine se nazivaju talasne jednačine.

Zaključujemo da u oblasti prostora gde su odsutni izvori polja postoji elektromagnetni talas. Ma koja komponenta jačine električnog polja ili magnetne indukcije, koju označimo sa ψ, zadovoljava ovu diferencijalnu jednačinu

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0\,. \tag{7}$$

Ako posmatrana sredina nije provodna, tj. ako je $\sigma = 0$, otpada poslednji član u jednačini (7), pa gornju jednačinu možemo napisati kraće u obliku

$$\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

gde smo uveli oznaku

---

[1] $rot\,rot\,\mathbf{A} = grad\,div\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} . \tag{9}$$

2. Sferni i ravni talasi

Posmatrajmo elektromagnetno polje u neprovodnoj sredini, daleko od oblasti poremećaja, tako da je rastojanje od oblasti u kojoj se poremećaj javio znatno duže od njenih dimenzija. Tada se može smatrati da je stanje elektromagnetnog polja sferno simetrično u odnosu na ovu oblast. Uočimo neki pravac od ma koje tačke O u oblasti poremećaja do tačke posmatranja i razmatrajmo elektromagnetno polje čije komponente jačina polja zavise samo od rastojanja i vremena:

$$\psi = \psi(r,t) . \tag{10}$$

U tom slučaju laplasijan u sfernim koordinatama[2] sadrži samo parcijale izvode po r :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) . \tag{11}$$

Diferencijalna jednačina (8) posle množenja sa r prelazi u

$$\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

Opšti integral ove jednačine je

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r}F_2\left(t + \frac{r}{v}\right) \tag{13}$$

gde su F_1 i F_2 potpuno proizvoljne funkcijee argumena $t - r/v$ odnosno $t + r/v$.

Da bismo sagledali fizički smisao opšteg integrala (13), posmatrajmo partikularno rešenje kod koga je $F_2 = 0$ i ošnačimo ga sa indeksom 1

$$\psi_1(r,t) = \frac{1}{r}F_1\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{14}$$

---

[2] $\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}$

Ako fiksiramo rastojanje $r = r_0$, ova funkcija predstavljaće zavisnost od vremena bilo koje komponente jačine električnog polja ili magnetne indukcije na određenom rastojanju r_0 od izvora poremećaja. Ako pak fiksiramo vreme stavljajući $t = t_0$, gornja funkcija daće nam prostorni raspored vrednosti ovih komponenti jačine električnog polja i magnetne indukcije u određenom trenutku t_0. Međutim, u opštem slučaju ova funkcija izražava zavisnost bilo koje komponente jačine električnog polja i magnetne indukcije od rastojanja i vremena kao nezavisno promenljivih, pri čemu svakoj vrendosti ove funkcije, odnosno pridruženom paru nezavisno promenljivih (r,t) odgovara određena faza elektromagnetnog polja, definisana izrazom $\phi = t - r/v$.

Posmatrajmo sada dve faze ovog polja na rastojanju r u trenutku t i na rastojanju $r+\Delta r$ u trenutku $t+\Delta t$. Uslov jednakosti ove dve faze daje

$$F_1\left(t+\Delta t-\frac{r+\Delta r}{v}\right)=F_1\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{15}$$

odakle proizilazi da će ova jednakost uvek biti zadovoljena ako su odgovarajući argumenti jednaki

$$t+\Delta t-\frac{r+\Delta r}{v}=t-\frac{r}{v}$$

a otuda

$$\Delta r = v\Delta t\,. \tag{16}$$

Odavde zaključujemo da se neka određena faza elektromagnetnog polja na rastojanju r u trenutku t može naći i na rastojanju $r+\Delta r$ u trenutku $t+\Delta t$ pod uslovom da je $\Delta r = v\Delta t$, to znači da se faza elektromagnetnog polja za vreme Δt pomeri za Δr radijalno od izvora poremećaja brzinom v. Međutim, zbog faktora $1/r$ ispred funkcije $F_1\left(t-r/v\right)$ same vrednosti komponenata jačine električnog polja i magnetne indukcije opadaju sve više sa udaljavanjem od izvora poremećaja i takav način prostiranja poremećaja elektromagnetnog polja predstavlja tzv. sferni elektromagnetni talas.

Drugo partikularno rešenje kod koga je $F_1 = 0$

$$\psi_2(r,t) = \frac{1}{r} F_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

razlikuje se od prvog samo po tome što umesto v figuriše $-v$, pa sličnim rezonovanjem dobijamo

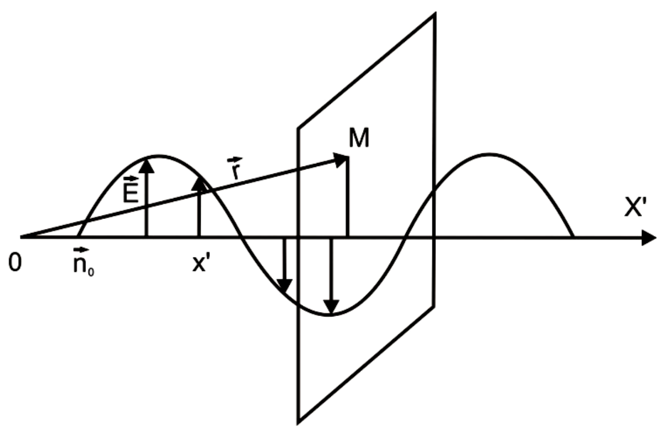
$$\Delta r = -v\Delta t \tag{17}$$

čemu odgovara prostiranje faze elektromagnetnog polja radijalno ka izvoru poremećaja istom brzinom v. Međutim, ono se obično ne javlja u realnosti, sem u slučaju refleksije talasa na sfernim površinama sa centrom u izvoru poremećaja, te se najčešće uzima samo prvi član.

Na vrlo velikim rastojanjima od izvora poremećaja, takvim da interval Δr u oblasti posmatranja zadovoljava uslov $\Delta r << r$, faktor $1/r$ možemo približno smatrati konstantnim. Ako uočeni pravac uzmemo za X'-osu, opšti integral (13) posmatrane talasne jednačine možemo pisati i u obliku

$$\psi(x',t) = f_1\left(t - \frac{x'}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x'}{v}\right) \tag{18}$$

gde su f_1 i f_2 proizvoljne funkcije navedenih argumenata. Tako je definisan tzv. ravni elektromagnetni talas kao granični slučaj sfernog i ovde prvi član prikazuje prostiranje poremećaja elektromagnetnog polja duž X'-ose s leva na desno brzinom v, a drugi član prostiranje ovog poremećaja s desna na levo istom brzinom.



Slika 2: Ravan elektromagnetni talas koji se prostire u pravcu X' - ose.

Da zaključimo: *ako se u nekoj maloj oblasti izazove poremećaj elektromagnetnog polja i ako je preostala oblast vakuumu slična (tj. homogena, izotropna i bez disperzije), neprovodna i bez* *slobodnih naelektrisanja, na velikim rastojanjima od izvora poremećaja ovaj poremećaj elektromagnetnog polja prostire se radijalno u svim pravcima u vidu sfernih elektromagnetnih talasa faznom brzinom* $v = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ *, koji na vrlo velikim rastojanjima (* $r >> \Delta r$ *) prelazi u ravne elektromagnetne talase.*

Faza talasa je veličina koja karakteriše stanje talasnog procesa. Skup tačaka u prostoru koje u fiksnom trenutku vremena imaju istu fazu oscilovanja obrazuju talasnu površ. Ako su talasne površi ravne kažemo da je talas ravan. Kod sfernog talasa talasne površi su sfere. Fazna brzina je brzina sa kojom se kreće fazna površ. Fazna brzina (jednačina 9) elektromagnetnog talasa opisanog jednačinama (5) i (6) je v. Fazna brzina elektromagnetnog talasa u vakuumu je $v = c$. Indeks prelamanja sredine definisan je kao odnos brzine svetlosti i brzine talasa u sredini $n = c/v = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$.

3. Prostiranje talasa u neprovodnim sredinama bez disperzije

U slučaju idealnih dielektrika provodnost je nula tj. $\sigma = 0$. Posmatrajmo prostiranje ravnih talasa za čiji se pravac prostiranja uzima X'-osa. Bilo koja komponenta ψ jačine električnog polja i magnetne indukcije će zavisiti samo od x' i t $\psi = \psi(x', t)$, a talasna jednačina se svodi na oblik:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \tag{19}$$

gde je uvedena oznaka $v = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. U ovom slučaju se sve tačke u ravni prostiranja elektromagnetnih talasa nalaze u istoj fazi oscilovanja (slika 2).

Od posebnog interesa su ravni talasi čije se talasne funkcije *harmonijski menjaju* sa vremenom tzv. <u>mohoromatski ravni talasi</u>. U ovom slučaju opšte rešenje talasne jednačine, na vrlo velikom rastojanju od izvora poremećaja, može se prikazati kao superpozicija:

$$\psi(x',t) = f_1\left(t - \frac{x'}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x'}{v}\right)$$

a kao partikularno rešenje uzimamo

$$\psi = \psi_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right) + \varphi\right] \tag{20}$$

pri čemu su ω i φ integracione konstante. Za $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$ imaćemo:

$$\psi_1 = \psi_0 \sin\omega\left(t - x'/v\right), \tag{21}$$

$$\psi_2 = \psi_0 \cos\omega\left(t - x'/v\right). \tag{22}$$

Linearna kombinacija ova dva rešenja $\psi_2 \mp i\psi_1$ na osnovu Ojlerovog obrasca može se napisati kao:

$$\psi = \psi_2 \mp i\psi_1 = \psi_0\, \mathrm{e}^{\mp i\omega\left(t - x'/v\right)} \tag{23}$$

što takođe predstavlja partikularno rešenje iste talasne jednačine. Uzimajući $x' = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_0$, gde je $\mathbf{n}_0$ jedinični vektor pravca prostiranja faze, i uveđenjem tzv. *talasnog vektora*, $\mathbf{k} = (\omega/v)\mathbf{n}_0$ čiji je intenzitet talasni broj $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, partikularno rešenje (23) postaje:

$$\psi = \psi_0 e^{\mp i\left(\omega t - kx'\right)} = \psi_0 e^{\mp i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)}. \tag{24}$$

Pri tome, jedino realni i imaginarni deo ovih izraza imaju neposredni fizički smisao, te ako spojimo istovremene položaje krajeva ovih veličina, na pr. krajeve realnih komponenata vektora $\mathbf{E}$ ili $\mathbf{B}$ dobićemo sinusnu liniju, kao što je prikazano na slici 2.

Kako funkcija ψ može biti bilo koja komponenta jačine elektrčnog ili magnetnog polja, tako će te veličine zadovoljavati diferencijalne jednačine:

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x'^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{25}$$

Odgovarajuća partikularna rešenja, koja prikazuju ravne monohromatske talase, na osnovu (24) su oblika:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\left(\omega t - kx'\right)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-i\left(\omega t - kx'\right)} \tag{26}$$

gde smo od dva znaka u eksponenti izabrali znakl minus, u saglasnosti sa ranijim izlaganjem. Drugo partikularno rešenje, na primer za električno polje, razlikuje se od prvog samo sa znakom u eksponentu ispred kx', tako opšti integral za jačinu električnog polja biće:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{-i\left(\omega t-kx'\right)}+\mathbf{E}_0 e^{-i\left(\omega t+kx'\right)} \tag{27}$$

gde prvi član predstavlja ravni monohromatski talas koji se prostire u smeru x' ose, a drugi talas koji se prostire u suprotnom smeru istom faznom brzinom $v=\omega/k$.

4. Osobine ravnih elektromagnetnih talasa

1. Elektromagnetni talasi su transverzalni. Neka se posmatraju ma kakvi ravni elektromagnetni talasi, koji ne moraju biti monohromatski, a prostiru se u pozitivnom smeru X'-ose. Uz pretpostavku da je u posmatranoj sredini van oblasti poremećaja $\rho=0$, jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine, $\mathbf{E}=-grad\phi-\partial\mathbf{A}/\partial t$, za skalarni potencijal biće $\phi=0$. Zbog toga se Lorencov uslov $div\mathbf{A}+\varepsilon\mu\dfrac{\partial\phi}{\partial t}=0$ svodi na $div\mathbf{A}=0$. Tada je elektromagnetno polje ovih talasa potpuno određeno vektorskim potencijalom koji zadovoljava diferencijalnu jednačinu za vektorski potencijal, drugu jednačinu u sistemu (3):

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x'^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0. \tag{28}$$

Opšti integral ove jednačine, koji odgovara prostiranju ravnih talasa u pozitivnom smeru X'-ose, biće proizvoljna funkcija argumenata $t-\dfrac{x'}{v}$:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}\left(t-x'/v\right)=\mathbf{A}\left(\xi\right),\quad \xi=t-x'/v \tag{29}$$

Pošto ni jedna od ovih komponenti ne zavisi od y' i z', Lorencov uslov $div\mathbf{A}=0$ postaje $\partial A_x/\partial x'=0$. Odavde se diferenciranjem po x' dobija da je $\partial^2 A_x/\partial x'^2=0$, pa zamenom u gornjoj diferencijalnoj jednačini za komponentu A_x nalazimo da je i $\partial^2 A_x/\partial t^2=0$ a otuda $\partial A_x/\partial t=const$.Tada iz prve jednačine iz sistema (3) vidimo da je i komponenta jačine električnog polja u pravcu prostiranja faze konstantna: $E_x=-\partial A_x/\partial t=const$. Međutim, pošto takve konstantne komponente nemaju nikakvog uticaja na elektromagnetne talase, koji su uslovljeni jedino vremenski promenljivim elektromagnetnim poljem, možemo uzeti da je ova konstanta jednaka nuli, jer A_x ne zavisi ni od x', šta više možemo staviti:

$$A_x = 0\,,\; E_x = 0\,. \tag{30}$$

Odavde zaključujemo da promenljivo električno polje ravnih elektromagnetnih talasa nema komponenti u pravcu prostiranja faze, tj. ovi talasi su uvek transverzalni.

2. Vektori E , $\mathbf{B}$ i $\mathbf{k}$ (odnosno $\mathbf{n}_0$) su međusobno normalni. Iz opšteg rešenja (29) dalje sledi da su njegovi izvodi po promenljivama x' i t

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x'} = -\frac{1}{v}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\,,\; \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}$$

pa je jačina električnog polja

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi} \equiv -\mathbf{A}'(t - x'/v)\,. \tag{31}$$

Tada se magnetna indukcija može naći prema drugoj jednačini iz sistema (3), u kojoj se Hamiltonov operator svodi samo na član sa izvodom po x' i gde možemo staviti $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}'_x$

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}'_x \frac{\partial}{\partial x'} \times \mathbf{A} = \mathbf{n}_0 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x'}\,.$$

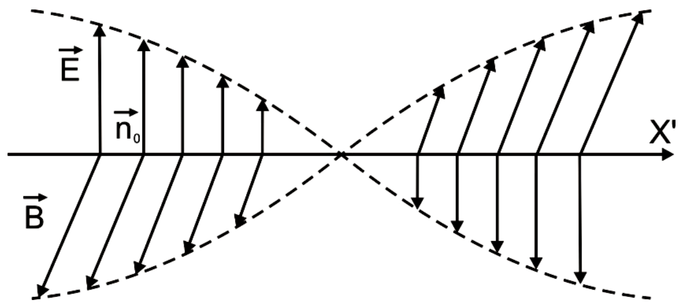
Ovaj izraz na osnovu prethodnih relacija možemo prikazati i pomoću jednačine električnog polja kao i karakteristika sredine

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{v}\left(\mathbf{n}_0 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \xi}\right) = \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}\right) \tag{32}$$

gde je $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Pošto je vektor $\mathbf{E}$ normalan na jedinični vektor $\mathbf{n}_0$, intenzitet magnetne indukcije biće

$$B = \frac{1}{v}E = \sqrt{\varepsilon\mu}E \qquad (33).$$

Prema tome, vektori električnog i magnetnog polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ i pravac prostiranja faze $\mathbf{n}_0$ ravnih elektromagnetnih talasa, u svakoj tački su međusobno normalni i da obrazuju desni tetraedar (slika 3).



Slika 3: Uzajamni položaj vektora $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{n}_0$ kod ravnog EM talasa

3. Energija elektromagnetnog polja ravnih elektromagnetnih talasa. Gustine energija električnog i magnetnog polja za posmatrane izotropne sredine određene su formulom

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \ , \quad w_m = \frac{1}{2\mu}B^2 \ ,$$

a ova druga gustina se može povezati sa prvom pomoću relacije $B = \sqrt{\varepsilon\mu}E$,

$$w_m = \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2\mu}\varepsilon\mu E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 .$$

Odavde proizilazi da je

$$w_m = w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tag{34}$$

tj. gustine energija električnog i magnetnog polja ravnih elektromagnetnih talasa su u svakoj tački međusobno jednake, a ukupna gustina energije elektromagnetnog polja ovih talasa biće

$$w = 2w_e = \varepsilon E^2 \tag{35}$$

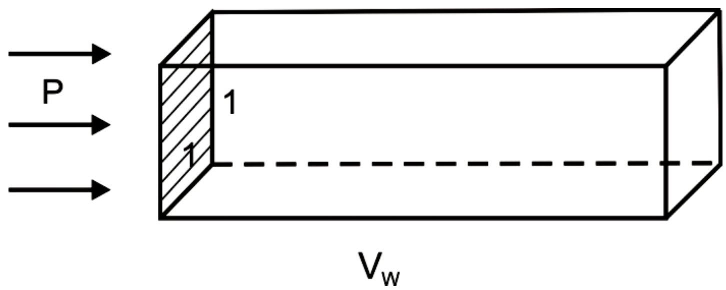
U tesnoj vezi sa ovom energijom stoji i odgovarajući Pointingov vektor

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\mathbf{E}\times(\mathbf{n}_0\times\mathbf{E})\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\mathbf{n}_0(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_0)\right] \tag{36}$$

ili pošto je $\mathbf{E}\perp\mathbf{n}_0$:

$$\mathbf{P} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\mathbf{n}_0 \ \text{odnosno} \ P = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2 . \tag{37}$$

Intenzitet ovog vektora predstavlja elektromagnetnu energiju koja prostruji kroz normalno postavljenu jedinicu površine oko uočene tačke u jedinici vremena (slika 1.4), a njegov pravac i smer određuju pravac i smer strujanja ove enrgije na tom mestu.



Slika 4: Uz definiciju Pointingovog vektora.

Na osnovu toga proizilazi da je intenzitet ovog vektora brojno jednak energiji koja se nalazi u paralelopipedu konstruisanom nad jediničnim poprečnim presekom i brzinom v_w strujanja ove enrgije tj. $P = wv_w$. Zamenom vrednosti ukupne gustine energije elektromagnetnog polja i $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ u izraz za intenzitet Pointingovog vektora dobija se

$$P = \varepsilon E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = wv \,.$$

Poređenjem dva izraza za intenzitet Pointingovog vektora vidi se da je

$$v_w \overset{def}{=} \frac{P}{w} = v \,. \tag{38}$$

Dakle, energija elektromagnetnog polja ravnih elektromagnetnih talasa struji u pravcu i smeru prostiranja faze, a brzina strujanja ove energije jednaka je brzini prostiranja faze elektromagnetnih talasa.